Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Freiwillige Ferienaufgaben

Es handelt sich ausschließlich um freiwillige Zusatzaufgaben zum Vorlesungsstoff. Es gibt keine Abgabe oder Korrektur. Eventuell können die Ferienaufgaben aber für reichlich Gesprächsstoff in Euren eigenen Arbeitsgruppen sorgen, die wir ausdrücklich empfehlen. Immer ganz alleine lernen ist doch auf Dauer weniger lustig.

Ferienaufgabe 1: Sei $b > 1$. Die Umkehrfunktion $x = \log_b y$ der Potenz $y = b^x$ heißt Logarithmus zur Basis b. Häufige Beispiele sind der dekadische Logarithmus $\lg = \log_{10}$ und der binäre Logarithmus $\mathrm{lb} = \log_2$. Varianten sind das deziBel in der Akustik, der pH-Wert in der Chemie, die Richterskala in der Geologie und viele andere.

Wie sind Logarithmen unterschiedlicher Basis ineinander umzurechnen? Beweis?

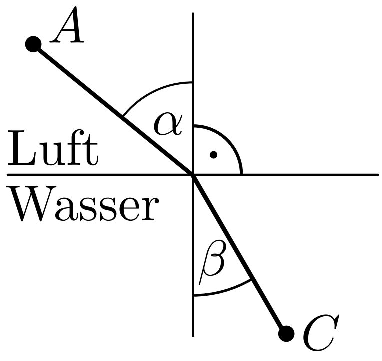
Ferienaufgabe 2: (wahre Geschichte) Fritzchen (Name der Redaktion bekannt) fährt mit Papa auf der Autobahn und langweilt sich. “Isses noch weit?” - “Hm, so 100 km.” - “Und wir fahren grade 100.” Nachdenkliche Pause. Dann grübelt Fritzchen: “Und wenn wir noch 80 km haben fahren wir 80, und bei 50 km dann 50 (und immer so weiter, Ergänzung der Redaktion). Ja, wann kommen wir denn dann an?”

Präzisiere und antworte.

Ferienaufgabe 3: Das Brechungsgestz des Ibn Sahl (ca. 940-1000) sagt, dass

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \tag{1}$$

Dabei ist α der Einfallswinkel und β der Austrittswinkel eines Lichstrahls zur Senkrechten der (geraden) Grenze zweier optischer Medien, z.B. Luft und Wasser. Ibn al-Haytham (auch Alhazen, ca. 965-1040) hat beobachtet, dass $n = v/w$, wobei v und w nur vom jeweiligen Medium abhängen.



Pierre de Fermat (1607-1665) hat postuliert, dass der Lichtweg von A nach C die benötige Zeit von A nach C minimiert, wobei v und w die Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium sind. Leite aus diesem Postulat das Brechungsgesetz her

(i) mit den Mitteln der Differentialrechnung,

(ii) durch geometrische Argumente.

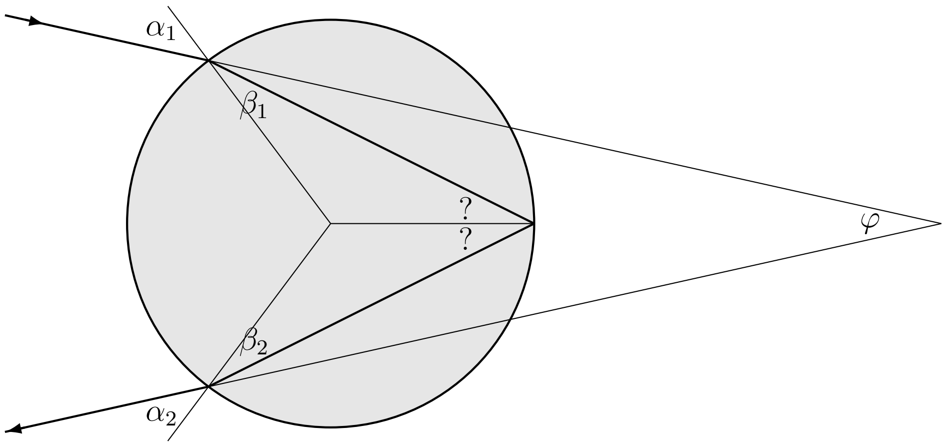
Hinweis: Als Vorübung dazu kann die einfache Spiegelung an einer Geraden dienen.

Ferienaufgabe 4: Ein Regenbogen entsteht, wenn Sonnenstrahlen an der Oberfläche eines Regentropfens gebrochen, im Tropfen reflektiert und beim Austritt aus dem Tropfen erneut gebrochen werden, bevor sie das Auge erreichen.

Wir nehmen vereinfachend an, dass Regentropfen einen kreisförmigen Querschnitt haben. Berechne unter Benutzung des Brechungsgesetzes,

$$\frac{\sin \alpha_k}{\sin \beta_k} = n,$$

den Winkel φ zwischen einfallendem und austretendem Strahl in Abhängigkeit des Einfallswinkels α_1. An der Grenze zwischen Luft und Wasser ist $n \approx 4/3$.



Welcher ist der maximale Winkel φ, und was hat dieser mit dem Winkel zu tun, unter dem der Regenbogen am Himmel sichtbar ist?

Begründe, wie sich die Farbfolge des Regenbogens aus der Abhängigkeit der Brechungszahl n von der Wellenlänge des Lichts ergibt. Sichtbares Licht erstreckt sich über Wellenlängen von ca. 380nm (violett) bis 780nm (rot). Die zugehörigen Brechzahlen liegen bei einer Temperatur von 20°C zwischen $1,345$ (violett) und $1,329$ (rot). Welche Winkelbreite der φ ergibt sich daraus für den Regenbogen? Wie ist die Abfolge der Farben?

Mit viel Glück und guten Augen lässt sich auch ein zweiter Regenbogen beobachten. Wie kann dieser entstehen? Wie ist die Abfolge der Farben?

Zwischen den beiden Regenbögen befindet sich das sogenannte Alexander-Band. Wieso sieht das dunkler aus?

Ferienaufgabe 5: Bestimme folgende Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \searrow 0} x^x$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, mit $a > 0$;

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{1/x}$;

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos(ax)}{\log\cos(bx)}$, mit $b \neq 0$.

Ferienaufgabe 6: Bestimme folgende Grenzwerte,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arctan x) - \operatorname{arcsinh}(\tanh x)}{\sinh(\operatorname{arctanh} x) - \arcsin(\tan x)},$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\arcsin(x) - \sinh(x)\operatorname{arcsinh}(x)}{\tan(x)\arctan(x) - \tanh(x)\operatorname{arctanh}(x)},$$

wobei arcsinh und arctanh die Umkehrfunktionen von sinh und tanh bezeichnen.

Ferienaufgabe 7: Wir wollen für $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x)\exp(-\sin x)$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bestimmen. Dazu berechnet Annalyx

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{2\cos x - x - \sin x\cos x}\exp(\sin x).$$

Offenbar konvergiert die rechte Seite gegen 0, falls $x \to \infty$. Andererseits sagt Annaliese, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \exp(\sin x)$$

für $x \to \infty$ (genauso offenbar) keinen Grenzwert hat. Was ist hier falsch?

Ferienaufgabe 8: Konstruiere eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$, für die gilt:

$$\psi(x) = 0, \text{ für alle } x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = 1, \text{ für alle } x \geq 1.$$

Hinweis: Betrachte und modifiziere zum Beispiel die Funktion $\exp(-1/x^2)$.

Ferienaufgabe 9: Es sei

$$\varphi(x) := x \tanh x.$$

Betrachte die Funktionenfolgen $f_n(x) := \frac{1}{n}\varphi(nx)$ und $g_n(x) := n\varphi(\frac{1}{n}x)$. Bestimme jeweils den punktweisen Limes $n \to \infty$, für feste x. Wo ist die Konvergenz gleichmäßig?

Ferienaufgabe 10: [Abelscher Grenzwertsatz] Beweise folgenden Satz. Sei

$$S(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 1$. Außerdem sei

$$S(1) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergent. Dann ist

$$S(1) \;=\; \lim_{x \to 1, |x|<1} S(x).$$

Bemerkung: Konvergiert eine Potenzreihe in $x = 1$, so muss ihr Wert an dieser Stelle also die stetige Fortsetzung der Werte auf dem Inneren der Einheitskreisscheibe sein.

Dieser Satz liefert z.B. aus der Arcustangens- und der Logarithmus-Reihe die Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \\ \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \end{aligned}$$

Hinweis: Gehe wie folgt vor:

(i) Betrachte die Nullfolge

$$r_n \;=\; S(1) - \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle x mit $|x| < 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} r_n x^n \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{1 - |x|}.$$

(ii) Folgere daraus, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$R(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

mindestens 1 ist. Also konvergiert die Potenzreihe für alle x mit $|x| < 1$ absolut.

(iii) Folgere daraus, dass

$$(x-1)R(x) \;=\; S(x) - S(1).$$

(iv) Zeige die Konvergenz

$$\lim_{x \to 1, |x|<1} (x-1)R(x) \;=\; \lim_{x \to 1, |x|<1} (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \;=\; 0$$

durch geeignete Zerlegung und Abschätzung der Summe.

Ferienaufgabe 11: Zeige, dass gilt:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{2}$$

Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

Wie können wir $\log 2$ mit Hilfe von Gleichung (2) approximieren? Wie viele Terme sind notwendig, um $\log 2$ auf drei Nachkommastellen genau zu berechnen?

Ferienaufgabe 12: Zeige mit E. Landaus Definition von π, dass

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + -... = \pi/4.$$

Hinweis: Untersuche Konvergenz und Stetigkeit der arctan-Reihe genau.

Ferienaufgabe 13: Im indischen Mathebuch Tantrasangraha-vyakhya (1530) findet sich die alternierende Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - + \dots$$

Nach Wikipedia hat Madhava (1350-1425) auch folgende sogar geometrisch konvergente alternierende Reihe benutzt:

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + - \dots\right)$$

Beide Reihen konvergieren viel schneller als die Reihe für $\pi/4 = \arctan 1$.

(i) Versuche, auch per Internet, einen Beweis für beide “konvergenz-beschleunigten” Darstellungen von π zu finden.

(ii) Madhava hat $\pi = 3.14159265359\dots$ auf 11 Dezimalstellen nach dem Komma bestimmt. Wieviele Terme hätte er in obigen Reihen auswerten müssen? Welche Reihe hat er wohl wirklich benutzt?

Ferienaufgabe 14:

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Geraden $g = g_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die Gestalt $g_{a,b}(\xi) = a\xi + b$ mit reellen Konstanten a, b. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = \sup \{ \ g(x) \ \mid g \text{ ist Gerade mit } g(\xi) \le f(\xi) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R} \ \} .$$

(ii) Sei $C_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2$ der Epi-Graph der Geraden $y = g_{a,b}(\xi)$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Menge. Zeige, dass auch umgekehrt die Funktion

$$f(x) = \sup \{ \ g_{a,b}(x) \ \mid (a, b) \in M \ \}$$

konvex ist.

Ferienaufgabe 15: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls $L > 0$ existiert, so dass für beliebige $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \ \le \ L|x - y|.$$

(i) Beweise, dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

(ii) Beweise, dass für beliebige Lipschitz-stetige Funktionen f und g auch deren Summe $s(x) := f(x) + g(x)$ und (punktweises) Maximum $m(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ Lipschitz-stetige Funktionen sind.

(iii) Beweise, dass der gleichmäßige Grenzwert f Lipschitz-stetiger Funktionen f_n mit Lipschitz-Konstante L ebenfalls Lipschitz-stetig ist mit demselben L.

Ferienaufgabe 16: Bestimme geeignete natürliche Zahlen N_1, N_2, N_3, N_4, so dass folgende Ausdrücke definiert sind. Bestimme dann alle $\alpha \ge 1$, für die die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=N_3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^\alpha}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=N_4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)^\alpha}$

Ferienaufgabe 17: Der komplexe Einheitskreis S^1 ist eine Gruppe bezüglich der komplexen Multiplikation $*$. Bestimme alle stetigen Gruppen-Homomorphismen f von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(S^1, *)$. Wie sieht der Kern $f^{-1}(1)$ aus?

Ferienaufgabe 18: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f(0) = 0$. Definiere die Sehnensteigung

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Setze g in 0 stetig fort. Welchen Wert hat $g(0)$? Ist g auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

Ferienaufgabe 19: Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen $f(x)$, $x > 0$.

(i) $f(x) = x^x$;

(ii) $f(x) = (x^x)^x$;

(iii) $f(x) = x^{(x^x)}$;

(iv) $f(x) = x^{(x+x^x)}$.

Ferienaufgabe 20: [Erzeugende Funktionen, Teil 1] Zeige dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Reihenentwicklung gilt:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Was ist der Konvergenzradius?

Bemerkung: Wir nennen die Funktion $(1+x)^\alpha$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \binom{\alpha}{n}$.

Ferienaufgabe 21: [Erzeugende Funktionen, Teil 2] Wir wollen uns noch einmal mit den Fibonacci-Zahlen beschäftigen. Zur Erinnerung: sie sind definiert als

$$a_1 = a_2 := 1, \; a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ziel ist die explizite Darstellung der a_n und der Konvergenzradius der erzeugenden Funktion. Gehe dazu in folgenden Schritten vor:

(i) Die Fibonacci-Folge ist für $n \geq 2$ streng monoton wachsend. Außerdem gilt für alle n: $a_{n+1}/a_n \leq 2$.

(ii) $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ konvergiert mindestens für $|x| < 1/2$.

(iii) Für $|x| < 1/2$ ist $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$. Wir können daraus schließen, dass die erzeugende Funktion folgende Form hat:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

(iv) Bestimme die Nullstellen x_1, x_2 des Nenner-Polynoms $g(x) = x^2 + x - 1$ und zeige, dass wir $f(x)$ wie folgt umschreiben können:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} \right).$$

(v) Schreibe $f(x)$ als Potenzreihe (Hinweis: die geometrische Reihe ist hier nützlich):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n. \tag{3}$$

(vi) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(vii) Zeige:

$$q := \lim_{n \to \infty} a_n / a_{n+1} = (-1 + \sqrt{5})/2.$$

(Der Limes q is der goldene Schnitt, weil die Proportion $q : 1 = (q + 1) : q$ gilt.)

(viii) Zeige, dass es sich beim Grenzwert aus (vii) um den Konvergenzradius von 3 handelt.

Ferienaufgabe 22: Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiter sei

$$0 = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a), \qquad 0 \neq f^{(k)}(a)$$

an einer Stelle $a \in J$. Für welche k hat f an der Stelle a ein lokales Extremum?

Ferienaufgabe 23: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige induktiv die Leibniz-Regel

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k-\ell)}$$

für die k-te Ableitung der Produktfunktion $f \cdot g$.

Ferienaufgabe 24: [Verallgemeinerung der Kettenregel, Teil 1] Betrachte die Verkettung von n Funktionen,

$$f = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1.$$

Zeige induktiv, dass für die Ableitung gilt:

$$f'(x) = f_n'\big(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1(x)\big) \cdots f_2'\big(f_1(x)\big) \cdots f_1'(x)$$

Ferienaufgabe 25: [Verallgemeinerung der Kettenregel, Teil 2] Es seien f und g zwei k-mal differenzierbare Funktionen und $F := g \circ f$. Definiere

$$F^{(n)}(x) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in T_n} \frac{n!}{k_1! \cdot \ \cdots \ \cdot k_n!} g^{(k_1+\cdots+k_n)}(f(x)) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^{n} \left(\frac{1}{m!} f^{(m)}(x) \right)^{k_m}.$$

Hierbei bezeichnet T_n die Menge aller n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ für die gilt: $\sum_{j=1}^{n} j k_j = n$.

Ferienaufgabe 26:

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0. Zeige, dass dann für beliebige Nullfolgen positiver Zahlen $(\underline{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\overline{h}_n) - f(x_0-\underline{h}_n)}{\overline{h}_n + \underline{h}_n}$$

Vorsicht: Es wird keine Differenzierbarkeit in anderen Punkten vorausgesetzt.

(ii) Betrachte die Zacken-Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|,$$

wobei die Gauss-Klammer $\lfloor y \rfloor$ wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich y bezeichnet. Die Funktion g ist periodisch, $g(x+1) = g(x)$, sowie auf $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ differenzierbar. Bilde nun die Summe

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^k x).$$

Zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **überall stetig aber nirgends differenzierbar** ist.

Hinweis: Zu gegebenem x_0 betrachte die Folgen $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underline{x}_n \ := \ 2^{-n} \lfloor 2^n x_0 \rfloor, \qquad \overline{x}_n = \underline{x}_n + 2^{-n}.$$

Insbesondere gilt $\underline{x}_n \leq x_0 \leq \overline{x}_n$. Zeige dann, dass die Differenzenquotienten

$$\frac{g(2^k \overline{x}_n) - g(2^k \underline{x}_n)}{2^k(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}$$

nur Werte ± 1 für $k < n$ bzw. 0 für $k \geq n$ annehmen. Zeige nun, dass die Annahme der Differenzierbarkeit von f in x_0 im Widerspruch zu (i) steht.

Bemerkung: Weierstraß (1872) war der erste, der zeigte, dass es Funktionen gibt, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind. Er führte den Beweis für Funktionen der Form $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k x)$ mit $b < 1$ und $ab > 1 + 3\pi/2$ durch.

Ferienaufgabe 27: [Pendelgleichung] Laut Newton erfüllt die Auslenkung $u(t)$ eines (Hookeschen Feder-) Pendels zur Zeit t die Differentialgleichung

$$u''(t) = -u(t).$$

Bestimme alle Lösungen $u(t)$, die Potenzreihen in t sind. Was ist ihr Konvergenzradius? Wie hängt diese allgemeine Lösung mit sin und cos zusammen?

Ferienaufgabe 28: [Besselsche Differentialgleichung] Die Besselsche Differentialgleichung ist gegeben duch

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)u(x) = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung durch den Ansatz als Potenzreihe,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

für $x > 0$ lösen. Wir fordern $a_0 = u(0) = 0$. Setze dazu formal die Potenzreihe in die Besselsche Differentialgleichung ein und führe einen Koeffizientenvergleich durch.

Überprüfe, dass $u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Besselsche Differentialgleichung löst.

Bemerkung: Die Besselsche Differentialgleichung und ihre Lösungen, die sogenannten Bessel-Funktionen, spielen in der Physik eine wichtige Rolle: Die Bessel-Funktionen treten zum Beispiel bei den Schwingungen einer Orgelpfeife auf, sowie bei der Ausbreitung von Wasserwellen, Schwingungen kreisförmiger Membranen (Trommel, Pauke) oder auch in der Elektrostatik.